Option	Sciences de la Vie et de la Terre et Sciences physiques	Coefficient	7
Matière	Maths	Durée	3 heures

Correction du bac blanc à distance 2020

Exercice 1 :

1)	$1+i+i^2+\cdots+i^{2020}=\dfrac{1-i^{2021}}{1-i}=0 \qquad (\ i^{2021}=i^{4\times 505+1}=i\ )$	c	0,5
2)	$\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{15}=\left[1,-\dfrac{\pi}{3}\right]^{15}=[1,-5\pi]=-1$	c	0,5
3)	$4^x-5.2^x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=2^x \\ X^2-5X+6=0 \end{cases}$ 1) $\Leftrightarrow \begin{cases} X=2^x \\ X=2 \text{ ou } X=3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\ x=1 \text{ ou } x=\log_2(3)$	c	0,5
4)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(2-e^x)}{(2-e^x)-1}.\dfrac{(2-e^x)-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{e^x-1}{x}=-1$	b	0,5
5)	$S=\left]0,e\right]$	b	0,5
6)	$\int_1^4\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx=2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4=2e(e-1)$	c	0,5

BAC BLANC à Distance 2020

Exercice 2 :

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 9 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3} \end{cases}$

1)	$Mq \quad \forall n \in \mathbb{N} : 1 < U_n$ *par recurrence* $u_0 > 1$ *soit* $n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow u_{n+1} > 1$ $\ldots$	0,5
2)	a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(1 - u_n) \quad$ *et* $u_n > 1 \Rightarrow 1 - u_n < 0$ *donc* (u_n) *est décroissante*	0,5
	b) (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc (u_n) est convergente	0,25
3)	On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : V_n = \ln(U_n - 1)$	
	a) $:V_{n+1} - V_n = \ln(U_{n+1} - 1) - \ln(U_n - 1) = \ln\left(\frac{U_{n+1} - 1}{U_n - 1}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ *et* $V_0 = \ln(U_0 - 1) = \ln 8 = 3\ln 2$	0,75
	b) $V_n = V_0 + nr = 3\ln 2 + n\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	0,5
	c) $(\forall n \in \mathbb{N}) : V_n = \ln(U_n - 1) = \ln\left(8\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \quad$ *donc* $U_n - 1 = 8\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *par suite* : $U_n = 1 + 8\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5
	d) $-1 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad$ *donc* $\lim U_n = 1$	0,5
4)	Pour tout entier naturel n on pose : $P_n = \prod_{k=0}^{k=n}(U_k - 1)$ $P_n = \prod_{k=0}^{k=n}(U_k - 1) = \prod_{k=0}^{k=n}\left(8\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = (2^3)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2+3+\cdots+n} = (2^3)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $== \left((2^3)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{n+1} = \left(\frac{2^{\frac{n}{2}+3}}{3^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$	0,5

BAC BLANC à Distance 2020

Exercice 3 :

1)	$z^2-4z+16=0$ $\Delta=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$ et $S=\left\{\ 2-2i\sqrt{3}\ ;\ 2+2i\sqrt{3}\ \right\}$	0,75
2)	a) construction des points A, B et C. les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4 A et B ont pour abscisse 2 et symétriques par rapport a l'axe des réels et C appartient l'axe des réels et a pour abscisse -4. $a=2+2i\sqrt{3}\ ;\ b=2-2i\sqrt{3}\ ;\ c=-4$	0, 5
	b) $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\dfrac{\left[1\ ,\frac{\pi}{6}\right]}{\left[1,-\frac{\pi}{6}\right]}=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{3}\right]$	0, 5
	c) nature du triangle ABC $\left\|\dfrac{a-c}{b-c}\right\|=1 \Leftrightarrow \|a-c\|=\|b-c\| \Leftrightarrow AC=BC$ $et\ \ \overline{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)}\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ $donc\ \ ABC\ \ triangle\ \ équilateral$	0, 5
3)	a) $R(O,-\frac{\pi}{3})\ (M)=M' \ \Leftrightarrow z'-0=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-0)$	0, 5
	b) $R(O,-\frac{\pi}{3})\ (C)=C' \ \Leftrightarrow c'=e^{-i\frac{\pi}{3}}c=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-2+2i\sqrt{3}$	0, 5
	c) $aff\,(\overrightarrow{OA})=a=2+2i\sqrt{3}$ et $aff\,(\overrightarrow{CC'})=c'-c=2+2i\sqrt{3}$ $donc\ \ \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CC'}$ par suite $OAC'C$ est un parallelograme et $\begin{cases} OA=\|a\|=4 \\ OC=\|c\|=4 \end{cases} \Rightarrow OA=OC$ $d'où\ \ OAC'C\ \ est\ un\ losange$	0, 5
4)	a) $\left\|\ 0+2-2i\sqrt{3}\ \right\|=4 \Rightarrow O\in(\Gamma)$	0, 25
	b) $M\in(\Gamma) \Leftrightarrow \left\|\ z-(-2+2i\sqrt{3})\ \right\|=4$ $\Leftrightarrow C'M=4$ $donc\ \ (\Gamma)\ est\ le\ cercle\ de\ centre\ C'et\ de\ rayon\ 4$	0, 5

BAC BLANC à Distance 2020

Problème :

Partie I : Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}$

1)	$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(x+1)-\ln(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)=0$	0,5
2)	a) $\forall x>0 \quad g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ $\forall x>0 \quad g'(x)\prec 0 \Rightarrow g$ *est strictement décroissante sur* $]0,+\infty[$	0,75
	b) *On a :* $g(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ *donc* $\forall x>0 : g(x)>0$	0,25

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$; $\|\vec{i}\|=4\text{cm}$

1)	a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln(x+1)-x\ln(x))=0=f(0)$ *donc* f *est continue à droite en* 0	0,5
	b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(x+1)-\ln(x))=+\infty$ *donc* f *est non dérivable à droite en* 0 la courbe de f admet une demie tangente verticale dirigée vers le haut à droite en O	0,5
2)	*soit* $x>0 \quad f(x)=(x\ln(x+1)-x\ln(x))=x(\ln(x+1)-\ln(x))\infty=x\left(\ln(\dfrac{x+1}{x})\right)=\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ *on pose* $X=\dfrac{1}{x} \quad (x\to+\infty)\Rightarrow(X\to 0)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$	0,5
3)	a) $\forall x>0 \quad f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-\ln(x)-1=\ln(x+1)-\ln(x)-\dfrac{1}{x+1}=g(x)$	0,5
	b)TV $(\forall x>0 \quad f'(x)=g(x)$ *et* $\forall x>0 \quad g(x)>0)\Rightarrow \forall x>0 \quad f'(x)>0$ *donc* f *est strictement coissante sur* $[0,+\infty[$	0,5
4)	$\left(\forall x>0 \quad f(x)-x=x\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-1\right)\right)$ *donc* $f(x)-x\ge 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-1\ge 0$ $\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{x}\ge e$ $\Leftrightarrow 0<x\le\dfrac{1}{e-1}$	0,5

BAC BLANC à Distance 2020

	$sur \left[0,\dfrac{1}{e-1}\right]$ (C) *est au dessus de* (D) $sur \left[\dfrac{1}{e-1},+\infty\right[$ (C) *est en dessous de* (D)	
5)	Tracé de (C)	1
6)	a) $\int_1^2 x\ln(x+1)dx = -\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\ln 3$ on pose u(x)=ln(x+1) et v'(x)=x	0,75
	b) $A=\left(\int_1^2 f(x)dx\right)\times(16cm^2)=(8+24\ln 3-32\ln 2)cm^2$	0,5

Partie III :

Soit (U_n) la suite définie par: $U_0=\frac{1}{4}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1}=f(U_n)$

1)	On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le U_n \le \frac{1}{e-1}$ On utilise le fait que f est croissante sur $\left[0,\frac{1}{e-1}\right]$ et $f\left(\frac{1}{e-1}\right)=\frac{1}{e-1}$	0,5
2)	D'apres la partie II 4) $\forall x \in \left[0,\frac{1}{e-1}\right]$ $f(x)>x$ et $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le U_n \le \frac{1}{e-1}$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(U_n)>U_n$ Par suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*	0,5
3)	$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et majorée donc convergente* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est definie par la relation* $U_{n+1}=f(U_n)$ *tel que :* f *est continue sur* $I=\left[0,\frac{1}{e-1}\right]$; $U_0\in I$; $f(I)\subset I$ *et* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente* *donc* $\lim U_n$ *est solution de l'equation* $f(x)=x$ *dans* I $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=\frac{1}{e-1}$ *et* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante donc* $\lim U_n=\frac{1}{e-1}$	0,75

BAC BLANC à Distance 2020